

第一章 空间解析几何与向量代数

考点一：空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系建立

过空间定点 O 作三条垂直的数轴，以 O 为原点，具有相同单位长度，三条数轴分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴，统称坐标轴。三条坐标轴的任意两条都可确定一个平面，称为坐标面。分别是 x 和 y 确定的 Oxy 平面， y 和 z 确定的 Oyz 平面， x 和 z 确定的 Oxz 平面。三个相互垂直的坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个卦象。

2. 空间中两点间的距离公式

设空间两点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ， $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ，它们两点之间的距离为：
 $|P_1P_2| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 。特别地，点 $P(x, y, z)$ 到原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离 $|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

考点二：向量代数

1. 向量的概念

由数值决定大小的量，如：质量，温度，面积，密度等，称之为标量（数量）。

有大小还有方向，如：力，加速度，速度等，称之为向量。

空间中以 A 为起点， B 为终点的线段称为有向线段，记为 $\overrightarrow{AB}$ ，简记为 α ，将向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|\alpha|$ ，称为向量的模。如果向量 α 的模为零，称为零向量。

定义 1: 如果两个向量 α 与 β 的长度相等且方向相同，则称这两个向量是相等的向量，记作 $\alpha = \beta$ 。

一个向量在空间中平移到任何位置而得到的向量与原向量相等，称为自由向量。

将若干个向量起点平移到同一个点后，它们的起点和终点都位于同一直线上，则称向量是共线的；起点和终点都位于同一个平面上，则称这些向量是共面的。不论长度大小，两向量 α 与 β 的方向相反或相同，称 α 与 β 平行，记为 $\alpha // \beta$ 。

2. 向量的加法

平行四边形法则：给定两个向量 α 与 β ，平移到同一个 O 点，设它们终点为 A 和 B，则 $\overrightarrow{OA}=\alpha$ ， $\overrightarrow{OB}=\beta$ ，以 $\overrightarrow{OA}$ ， $\overrightarrow{OB}$ 为邻边构造一个平行四边形 OBCA。以 O 为起点 C 为终点的向量 $\gamma=\overrightarrow{OC}$ 称为向量 α 与 β 的和，记为 $\alpha+\beta=\gamma$ ，即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 。

三角形法则：给定两个向量 α 与 β ，将 β 平移，使其起点平移到 α 的终点，此时 β 的终点与用平行四边形法则确定的点 C 重合，从而 $\beta=\overrightarrow{AC}$ ，于是 α 与 β 的和为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$ 。

零向量起点与终点重合，对于任何向量 α ，三角形法则可得 $\alpha+0=\alpha$ 。

向量加法的逆运算称为向量减法。给定向量 α 与 β ，如存在 γ 使得 $\alpha=\beta+\gamma$ ，则称 γ 是向量 α 与 β 的差，记为 $\alpha-\beta=\gamma$ 。

设 $\overrightarrow{OA}=\alpha$ ， $\overrightarrow{OB}=\beta$ ，有三角形法则可知 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$ ，于是 $\alpha-\beta=\overrightarrow{BA}$ 。

也就是说，将 α 与 β 的起点放在一起，则 β 的终点到 α 的终点向量即为 $\alpha-\beta$ 。

向量加法运算的规律：1) 交换律： $\alpha+\beta=\beta+\alpha$ ；2) 结合律： $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$ 。

3. 向量与数的乘法

定义 2：给定实数 λ 及其向量 α ，规定 λ 与 α 的数量乘法 $\lambda\alpha$ 是一个向量，大小规定为 $|\lambda\alpha|=|\lambda|\cdot|\alpha|$ ；其方向规定为：

$\lambda>0$ 时， α 与 $\lambda\alpha$ 的方向一致， $\lambda<0$ 时， α 与 $\lambda\alpha$ 的方向相反。

数量乘法有如下运算：1) 结合律： $\lambda(\mu\alpha)=\mu(\lambda\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$ ，其中 λ ， μ 都是数量；

2) 对于数量加法的分配律： $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$ ；3) 对于向量加法的分配律： $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$ 。向量的加法和数量的乘法统称为向量的线性运算。

定理 1：设向量 $\alpha \neq 0$ ，则称向量 β 平行于 α 的充分必要条件是：存在数量 λ ，使得 $\beta=\lambda\alpha$ 。

如果向量 α 的模为 1，即 $|\alpha|=1$ ，则称 α 为单位向量。如果 $\alpha \neq 0$ ，记 $\alpha^0=\frac{1}{|\alpha|}\alpha$ ，称之为 α 的单位化向量。

4. 向量的投影

若非零向量 α ， β 的夹角 $(\alpha, \beta)=\pi/2$ ，则称 α 与 β 垂直。规定零向量与任何向量垂直。

给定向量 $\overrightarrow{AB}$ 及数轴 u ，过点 A, B 向数轴 u 作垂线，设垂足为 A' ， B' ，这两个点在数轴 u 上的坐标分为 u_A ， u_B 。分别称为 A' ， B' 在点 A, B 在数轴 u 上的投影点；称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴 u 上的投影向量；记 $Pr_{ju}\overrightarrow{AB}=u_B-u_A$ ，称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在数轴 u 上的投影。

定理 2 (投影定理) : 对任意非零向量 α , 有 $Prj_u \alpha = \alpha \cos \varphi$, 其中 φ 是 α 与数轴 u 的夹角。

定理 3 (投影的线性性质) :

$$1) Prj_u(\alpha + \beta) = Prj_u \alpha + Prj_u \beta, Prj_u(\alpha - \beta) = Prj_u \alpha - Prj_u \beta$$

$$2) \text{ 设 } \lambda \text{ 是数量, 则 } Prj_u(\lambda \alpha) = \lambda Prj_u \alpha$$

5. 向量的坐标

在空间直角坐标系中, 与 x 轴, y 轴, z 轴三个坐标轴同方向的单位向量分别记为 i, j, k , 称为基本单位向量。给定空间中的点 $M(a, b, c)$, 向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为向径。三个坐标轴上的投影为 $Prj_x \overrightarrow{OM} = a, Prj_y \overrightarrow{OM} = b, Prj_z \overrightarrow{OM} = c$ 。点 M 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的投影分别设为 A, B, C , 可知向径 $\overrightarrow{OM}$ 投影向量为 $\overrightarrow{OA} = ai, \overrightarrow{OB} = bj, \overrightarrow{OC} = ck$ 。称之为 $\overrightarrow{OM}$ 在三个坐标轴上的分向量。 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, 即 $\overrightarrow{OM} = ai + bj + ck$ 称此式为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的分解式。

定理 4: 设向量 $\alpha = \{a_1, a_2, a_3\}, \beta = \{b_1, b_2, b_3\}, \lambda$ 为数量, 则

$$(1) \alpha + \beta = \{a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\}, \alpha - \beta = \{a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3\};$$

$$(2) \lambda \alpha = \{\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3\}, \text{ 特别地 } -\alpha = \{-a_1, -a_2, -a_3\}.$$

非零向量 v 与 x 轴、 y 轴、 z 轴之间的夹角 α, β, γ 称为 v 的方向角; $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 的方向余弦。

考点三: 数量积与向量积

1. 数量积 (数量积不是向量而是数量, 也被称为点积)

两个向量 α 与 β , 定义它们数量积为 $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot |\beta| \cos \varphi$ 其中 φ 是 α 与 β 的夹角

投影关系 $\alpha \cdot \beta = |\alpha| \cdot Prj_\alpha \beta = |\beta| \cdot Prj_\beta \alpha$ 。由于夹角为 $0, \alpha \cdot \alpha = |\alpha| \cdot |\alpha| \cos 0 = |\alpha|^2$ 。

定理 1: (1) 交换律 $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ (2) 结合律 $\lambda(\alpha \cdot \beta) = (\lambda \alpha) \cdot \beta = \alpha \cdot \lambda \beta, \lambda$ 是数量。

$$\text{分配律 } (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$$

定理 2: 向量 α 与 β 相互垂直的充分必要条件 $\alpha \cdot \beta = 0$ 。

设向量 $\alpha = \{a_1, a_2, a_3\}, \beta = \{b_1, b_2, b_3\}$, 得出 $\alpha \cdot \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ 。

$$\cos \varphi = (\alpha \cdot \beta) / (|\alpha| \cdot |\beta|) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) / (\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2})$$

2. 向量积

两个向量 α 与 β ，它们的向量积规定为一个向量 γ ，由下述方式确定：

- 1) γ 的长度为 $|\gamma|=|\alpha| \cdot |\beta| \sin \varphi$ ，其中 φ 是 α 与 β 的夹角
- 2) γ 的方向垂直于 α 与 β 所确定的平面， γ 指向按照右手法则由 α 转到 β 来确定。

定理 3： (1) 反交换律： $\alpha \times \beta = -(\beta \times \alpha)$ ； (2) 结合律： $\lambda(\alpha \times \beta) = (\lambda\alpha) \times \beta = \alpha \times \lambda\beta$

(3) 分配律： $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$ ， $(\alpha + \beta) \times \gamma = \alpha \times \gamma + \beta \times \gamma$

定理 4： 两个向量 α 与 β 相互平行的充分必要条件是 $\alpha \times \beta = 0$ 。

向量积的坐标表示： $\alpha \times \beta = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ 。

考点四：空间中的曲面和曲线

1. 曲面方程

定义 1：给定曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ ，已知方程的解集非空若曲面 S 与方程有下述关系：1) 曲面 S 上点都满足方程，即 S 上的任何点的坐标都是方程的解。

2) 方程的解都在 S 上，即方程的任何解 x, y, z 所对应的点 $P(x, y, z)$ 都在 S 上，则称方程为曲面 S 的方程， S 称为方程所表示的曲面。

球面标准方程： $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = R$ 。

定理 1： 给定方程 $F(x, y, z) = 0$ 和 $G(x, y, z) = 0$ ，它们的解集非空，分别设为 Ω_F, Ω_G 。1) 这两个方程表示同一个曲面的充分必要条件是它们为同解方程，即 $\Omega_F = \Omega_G$ 。

2) 如果 $\Omega_F \subset \Omega_G$ ，则 $F(x, y, z) = 0$ 表示的曲面是 $G(x, y, z) = 0$ 表示曲面的一部分。

定理 2： 设曲面 S 的方程是 $F(x, y, z) = 0$ ，则曲面 S 关于 Oxy 平面对称的充分必要条件是：如果点 $P(x, y, z)$ 的坐标满足方程，即 $F(x, y, z) = 0$ ，那么必有点 $P'(x, y, -z)$ 的坐标也满足方程，即 $F(x, y, -z) = 0$ 。

定义 2：一条平面曲线 C 绕在它所在的平面的一条直线 L 旋转一周所生成的曲面称为旋转曲面，其中曲线 C 称为旋转曲面的母线，直线 L 称为旋转曲面的旋转轴。

旋转曲面方程： $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ 。

定义 3: 平行于定直线 L 并沿定曲线 C 移动的直线 l 所生成的曲面称为柱面, 动直线 l 在移动中的每一个位置称为柱面的母线, 曲线 C 称为柱面的准线。

2. 空间中的曲线方程

(1) **空间曲线的一般方程**: 两个曲面 $S_1: F(x, y, z) = 0, S_2: G(x, y, z) = 0$, 交线 C 上的 $P(x, y, z)$

既要满足方程 F 又要满足方程 G 。有
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$
 为空间曲线 C 的一般方程

(2) **空间曲线的参数方程**: 对于空间曲线 C 也有参数表达式 $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 。

3. 空间曲线在坐标面上的投影

曲线 C 同解变形之后有 $K(x, y, z) = 0, H(x, y, z) = 0$ 它们几何意义: C 也是曲面 K 与 H 的交线。由于 H 是母线平行于 z 轴的柱面, 其准线是 Oxy 平面上的曲线 $H(x, y) = 0$, 投影曲线记为 $\{H(x, y) = 0, z = 0\}$, 称 $H(x, y) = 0$ 为曲线 C 关于 Oxy 平面投影的柱面。

考点五: 空间中的平面和直线

1. 平面方程

(1) 平面的点法式方程

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 及非零向量 $n = \{A, B, C\}$, 在设点 $P(x, y, z)$ 是平面 π 上的移动, 则向量 $\overrightarrow{P_0P}$ 总与 n 垂直, 根据数量积得: $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

称 n 为平面 π 的法向量, 称方程为平面 π 点法式方程。

(2) 特殊位置的平面方程

在平面一般方程 $Ax + By + Cz + D = 0$, 根据各项系数判断平面相对于坐标系的特殊位置。

当 $D = 0$ 时, 表示过原点的平面; 当 $A = 0$ 时, 平行于 x 轴的平面; 当 $B = 0$ 时, 平行于 y 轴的平面; 当 $C = 0$ 时, 平行于 z 轴的平面。

方程 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, 称方程为平面 π 的截距式方程。显然点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ 都在平面 π 上, 称 a, b, c 是在平面 π 分别在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的截距。

(3) 两个平面的夹角

给定两个平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, 则它们的法向量为 $n_1=\{A_1, B_1, C_1\}$ 和 $n_2=\{A_2, B_2, C_2\}$, 平面夹角为 θ , 则有 $\cos\theta=\frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$ 。可以得出以下结论: 1) π_1 与 π_2 垂直充分必要条件为 $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2=0$ 。 2) π_1 与 π_2 平行的充分必要条件 $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$

2. 直线方程

直线方程的三种形式:

(1) 直线的对称式方程 (2) 直线的参数式方程 (3) 直线的一般方程

两条直线的夹角和直线与平面的夹角。

考点六: 二次曲面

1. 椭球面

由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, (其中 $a>0, b>0, c>0$) 所表示的曲面称为椭球面。

对称性: 关于所有平面对称; 截痕法截痕。

特殊情况: 方程表示的椭球面来说, 原点 O 为它的中心, $2a, 2b, 2c$ 为它的三个轴长。

当 $a=b=c$, 方程变为 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 表示球心在原点, 半径为 a 的球面。

当 $a=b$ 时, 方程变为 $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 表示 Oyz 平面上椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转的旋转面, 称为旋转椭圆面。

2. 椭圆抛物面

由方程 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, (其中 $a>0, b>0$) 所表示的曲面称为椭圆抛物面。

对称性: 关于 Oxz 平面和 Oyz 平面对称; 截痕法截痕。

特殊情况: 当 $a=b$, 方程为 $z = \frac{x^2+y^2}{a^2}$, 表示 Oyz 平面上的抛物线 $z = \frac{y^2}{a^2}$ 绕 z 轴旋转的旋转抛物面。

3. 椭圆锥面

由方程 $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ (其中 $a>0, b>0$), 所表示的曲面为椭圆锥面。

其关于三个坐标面对称, 此时的椭圆锥面称为上下开口的, 原点 O 称为椭圆面的定理。

例如: $z^2 = 2x^2 + 3y^2$ 表示椭圆锥面。

当 $a=b$ 时，椭圆锥面变为圆锥面。例如： $z^2=x^2+y^2$ 表示圆锥面。

4. 单叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ，（其中 $a>0, b>0, c>0$ ）所表示的曲面称为单叶双曲面。

其中关于三个坐标面对称，： $x^2+y^2-z^2=1$ 表示单叶双曲面。

5. 双叶双曲面

由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ ，（其中 $a>0, b>0, c>0$ ）所表示的曲面称为双叶双曲面。

其中关于三个坐标面对称，例如： $z^2-x^2-y^2=-1$ 表示为双曲面

第二章 多元函数的微分学

考点一：多元函数的基本概念

1. 平面点集

平面中某些点所构成的集合称为平面点集。例如：给定 $P_0(x_0, y_0)$ ，点集 $D = \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$

($\delta > 0$ 为常数) 称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U_\delta(P_0)$ ，表示与 P_0 距离小于 δ 的集合。称点集 $U_\delta(P_0) - \{P_0\}$ 为点 P_0 的去心邻域，记作 $U_\delta^0(P_0)$ ，表示从邻域中 $U_\delta(P_0)$ 中去掉 P_0 的集合。

在平面上由一条或几条曲线围成并连成一片的点集称为区域，称为该曲线的边界，边界上的每个点称为该区域的边界点。如果区域含有它所有边界，则称该区域是闭区域；如果区域不含它的任何边界点，则称该区域开区域。如果平面点集 D 包含在以原点为圆心的某个圆中，则称点集 D 是有界的，否则称为无界的。

2. 二元函数

定义 1：设 x, y, z 三个变量，如果变量 x, y 在一定范围内变化时，对于 x, y 的每一组取值，变量 z 按照某个法则 f 总有确定的值与 x, y 对应，则称变量 z 是变量 x, y 的二元函数，简称为函数，记为 $z = f(x, y)$ 或 $z = z(x, y)$ ，并称变量 x, y 为二元函数的自变量，称变量 z 为因变量。

每一组 x, y 所对应的 z 值都是唯一的，称这样的函数为单值函数，否则称为多值函数。

将自变量 x, y 变化成为二元函数 $z = f(x, y)$ 的定义域，记为 D_f 。 z_0 称为二元函数 $z = f(x, y)$ 在 x_0, y_0 处的函数值，所有函数值的集合称为二元函数 $z = f(x, y)$ 的值域，记为 R_f 。

3. 多元函数的构造

(1) 多元函数的四则运算

以二元函数为例。给定二元函数 $f(x, y)$ 及 $g(x, y)$ 且 $D_f \cap D_g \neq \emptyset$ ，则可用四则运算构造新的函数：1)

函数的加法： $F(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$ ， $D_F = D_f \cap D_g$ ；

2) 函数的减法： $F(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$ ， $D_F = D_f \cap D_g$ ；

3) 函数的乘法： $F(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$ ， $D_F = D_f \cap D_g$ ；

4) 函数的除法： $F(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ ， $D_F = D_f \cap D_g - \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ 。

(2) 多元函数的复合函数

若函数 $u=f(v)$, $v=g(x, y)$, 则复合后的新函数为 $u=F(x, y)=f[g(x, y)]$, 是二元函数, 称 v 为中间变量, $F(x, y)$ 称为复合函数。

设若干个不同变量, 由它们各自的一元基本初等函数出发, 经过有限次的加减乘除运算及有限次的复合得到的函数称为初等函数。

(3) 隐函数

隐函数: 如果方程 $F(x, y)=0$ 能确定 y 是 x 的函数, 那么这种方式表示的函数是隐函数。

显函数: 解析式中明显地用一个变量的代数式表示另一个变量时, 称为显函数。显函数可以用 $y=f(x)$ 来表示。

4. 多元函数的极限

定义 2: 函数 $z=f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个去心邻域 $U^0(P_0)$ 有定义。若当点 $P(x, y)$ 无限接近点 P_0 时, 函数在点 P 的函数值 $f(x, y)$ 与某个实数 A 也无限接近, 则称 A 是函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 处的二重极限,

简称为极限, 记为 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A$ 。

定理 1: 函数 $z=f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的极限存在的充分必要条件是: 点 $P(x, y)$ 以任何方式趋向于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限都存在且相等。

5. 多元函数的连续性

定义 3: 设 $f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 的某个邻域中有定义。如果 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$,

则称函数 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续; 否则称为间断。

定理 2 (最值定理): 如果函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 D 上一定有最大值和最小值。

定理 3 (介值定理): 设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, M 和 m 分别是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值。对于任何实数 c , 只要满足 $m \leq c \leq M$, 则至少存在一定 $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$, 使得 $f(\bar{x}, \bar{y}) = c$ 。

考点二: 偏导数与全微分

1. 偏导数的概念

定义 1: 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有定义。固定 $y=y_0$, 对于一元函数 $F(x)=f(x, y_0)$ 的自变量在 x_0 处给出增量 Δx , 则有增量 $\Delta F=F(x_0+\Delta x)-F(x_0)=f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)$ 。若极限

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在, 则称极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 偏导数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=x_0, y=y_0}$ 。

2. 高阶偏导数

设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内有偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x, y)$ 。如果这两个偏导数在函数 D 内仍有偏导数, 则称他们的偏导数为 $f(x, y)$ 的二阶偏导数。

3. 全微分

定义 1: 如果函数 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 处的全增量 $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ 可以表示为 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$, 仅与 x, y 有关, $\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, $o(\rho)$ 是 ρ 的高阶无穷小量 ($\rho \rightarrow 0$) 此时称函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处可微分, $A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的全微分, 记为 dz 即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$ 。该表达式称为函数 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 处(关于 $\Delta x, \Delta y$)的全微分。

定理 2 (可微的必要条件): 如果函数 $z=f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微, 则 $z=f(x, y)$ 在点 (x, y) 处的两个偏导数都存在, 且 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$ 中的常数 A, B 恰是函数的两个偏导数, 即 $A=f_x(x, y), B=f_y(x, y)$ 。

定理 3 (可微的充分条件): 如果函数 $z=f(x, y)$ 的两个偏导数在点 (x, y) 处连续, 则函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 处可微。

考点三: 复合函数与隐函数的偏导数

1. 复合函数的偏导数

定理 1: 如果函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 都在点 x 处可微, 函数 $z=f(u, v)$ 在对应点的 (u, v) 处也可微, 则复合函数 $z=f[\varphi(x), \psi(x)]$ 在点 x 处可导, 而且有 $\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}$ 。称该式中的复合函数的导数 $\frac{dz}{dx}$ 为全导数。

定理 2: 如果函数 $u=\varphi(x)$ 及 $v=\psi(x)$ 都在点 x 处可微, 函数 $z=f(u, v)$ 在对应点的 (u, v) 处也可微, 则复合函数 $z=f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的两个偏导数都存在, 并有: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$ 。

定理 3: 如果函数 $u=\varphi(x, y)$ 在点 x 处可微, 函数 $z=f(u)$ 在对应点的 u 处也可微, 则复合函数 $z=f[\varphi(x, y)]$ 在点 (x, y) 的偏导数存在, 且 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}$ 。

链式法则: 1) 所求的偏导数的个数是复合后自变量的个数; 2) 每个偏导数都是若干个选项的和, 这些项是对各个中间变量的偏导数乘以这个中间变量对于该自变量的偏导数, 因此, 项的格式就是中间变量的个数。

2. 隐函数的偏导数

定理 4 (隐函数的导数和偏导数): 1) 设二元函数 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某领域中连续的偏导数, 且 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, $F(x_0, y_0) = 0$, 则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域可唯一确定具有连续导数的隐函数 $y=f(x)$, 使得 $y_0=f(x_0)$, 并有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$ 。

2) 设函数 $F(x, y, z)$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某领域中连续的偏导数, 且 $F_y(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, 则方程 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 的某邻域可唯一确定具有连续偏导数的隐函数 $z=f(x, y)$, 使得 $z_0=f(x_0, y_0)$, 并有 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$ 。

考点四: 偏导数的应用

1. 多元函数的极值与最值

定义 1: 设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 上有定义, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 的每个邻域 $U \subset D$ 。

- 1) 对于 U 中异于 P_0 的任何点 $P(x, y)$, 总有不等式 $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的一个极大值, $P_0(x_0, y_0)$ 称为极大值点。
- 2) 对于 U 中异于 P_0 的任何点 $P(x, y)$, 总有不等式 $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ 成立, 则称 $f(x_0, y_0)$ 为函数 $f(x, y)$ 的一个极小值, $P_0(x_0, y_0)$ 称为极小值点。

定理 1 (极值的必要条件) : 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的两个偏导数都存在, 且函数在该点取得极值, 则 $f_x(x_0, y_0)=0, f_y(x_0, y_0)=0$ 。

$f_x(x, y)=0, f_y(x, y)=0$ 的点称为函数 $z=f(x, y)$ 的驻点。

定理 2 (极值的充分条件) : 设函数 $z=f(x, y)$ 在其驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶的连续偏导数。

令 $A=f_{xx}(x_0, y_0), B=f_{xy}(x_0, y_0), C=f_{yy}(x_0, y_0), \Delta=B^2-AC$, 有: 1) 如果 $\Delta<0$, 则点 (x_0, y_0) 是函数的极值点, 且当 $A<0$, $f(x_0, y_0)$ 是极大值; 当 $A>0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值。

2) 如果 $\Delta>0$, 则点 (x_0, y_0) 不是函数的极值点。

3) 如果 $\Delta=0$, 则函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 有无极值不能确定。

最值: 在给定的区域上找出全部可疑的最值点, 在这些可疑的最值点上比较函数值的大小, 最大者为最大值, 最小者为最小值。

条件极值: 对于自变量除了定义域外的限制外, 别无其他限制条件, 一般称为无约束极值问题。求解条件极值的一般方法: 拉格朗日乘数法。

定理 3 (拉格朗日乘数法) : 设二元函数 $f(x, y)$ 和 $\varphi(x, y)$ 在所考虑的区域内有连续的偏导数, 且 $\varphi_x(x, y), \varphi_y(x, y)$ 不同时为零, 令 $L(x, y)=f(x, y)+\lambda\varphi(x, y)$, 其中 λ 称为拉格朗日乘数, $L(x, y)$ 称为拉格朗日函数。求 L 的偏导数, 并建立方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = f_x(x, y) + \lambda\varphi_x(x, y) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = f_y(x, y) + \lambda\varphi_y(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{如果函数 } z=f(x, y) \text{ 在约束条件 } \varphi(x, y)=0 \text{ 下的极值点是 } (x_0, y_0), \text{ 则存在 } \lambda_0, x_0, y_0 \text{ 是方程组的解。}$$

2. 偏导数的几何应用

定义 2: 给定空间曲线 L , 点 P_0 是 L 的一个定点。点 P 是 L 上异于 P_0 的点, 直线 P_0P 称为经过 P_0 的一条割线。 P 沿曲线 L 无限接近点 P_0 时, 割线 P_0P 的极致位置 P_0T 称为曲线 L 在点 P_0 的切线, 经过点 P_0 且垂直于切线平面 π 称为曲线在点 P_0 的法平面。

法平面方程: $x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$ 。我们将向量 $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$ 称为曲线 L 在点 P_0 的切向量。

空间曲面的切平面与法线, 以及垂直于切平面的法向量和法向量的方向弦。

3. 方向导数与梯度

方向导数与梯度的概念以及有关方向函数与梯度的运算。

定理：如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微，则在点 P 处沿任意方向 l 的方向导数存在且有 $\frac{\partial z}{\partial l} =$

$\frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$ ，其中 α, β 分别是 l 与 x 轴、 y 轴正向的夹角。

梯度： $\text{grad } f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)i + f_y(x_0, y_0)j = \{f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\}$

获取完整资料 请下载 APP 或关注公众号



扫码下载 app



扫码关注公众号