

中值定理及导数的应用

考点一：微分中值定理

1、罗尔 (Rolle) 中值定理：

如果函数 $y = f(x)$ 满足：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导；
- (3) $f(a) = f(b)$,

则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f'(\xi) = 0$.

2、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理：

如果函数 $y = f(x)$ 满足：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导，

则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$.

3、柯西中值定理：

如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足：

- (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续；
- (2) 在开区间 (a, b) 内可导；
- (3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$,

则在开区间 (a, b) 内至少存在一点 ξ , 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

4、泰勒中值定理：

如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $(n+1)$ 阶导数, 则对此邻域内任意点 x , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

成立, 其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

我们称

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

式为在 x_0 处的 n 阶泰勒公式；系数 $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{f''(x_0)}{2!}$, $\dots$, $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ 称为泰勒系数；多项式

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

称为 n 次泰勒多项式；

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

式称为 n 阶泰勒公式的拉格朗日余项，且当 $x \rightarrow x_0$ 时，它是 $(x - x_0)^n$ 的高阶无穷小。

考点二：洛必达法则

1、“ $\frac{0}{0}$ ”型未定式极限

如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$;
- (2) 在点 x_0 的某去心邻域内函数 $f(x)$, $g(x)$ 都可导，且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞),

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{ (或 } \infty \text{)}.$$

如果将该定理中的 $x \rightarrow x_0$ 换成 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, 只要修改相应的条件，也会得到同样的结论。

2、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式极限

如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足下列条件：

- (1) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$;
- (2) 在点 x_0 的某去心邻域内函数 $f(x)$, $g(x)$ 都可导，且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞),

则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (或 ∞).

如果将该定理中的 $x \rightarrow x_0$ 换成 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow \infty$, 只要修改相应的条件, 也会得到同样的结论.

3、除了“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式外, 还有“ $0 \cdot \infty$ ”, “ $\infty - \infty$ ”, “ 0^0 ”, “ 1^∞ ”和“ ∞^0 ”等类型的未定式. 一般地, 这些类型的未定式可以先通过适当的恒等变形转化为“ $\frac{0}{0}$ ”型或“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式, 再用洛必达法则求极限.

考点三：导数的应用

1、函数单调性的判定法

设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 则有

- (1) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) > 0$, 则函数在 $[a, b]$ 内单调增加;
- (2) 如果在 (a, b) 内 $f'(x) < 0$, 则函数在 $[a, b]$ 内单调减少.

2、函数的极值

(1) 极值的定义

设函数在点 x_0 的某邻域内有定义, 如果对于该邻域内的任意一点, 有

- ① $f(x) < f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值, 其中 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点;
- ② $f(x) > f(x_0)$, 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值, 其中 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 驻点

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$ 或者 $f'(x_0)$ 不存在

推论 如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且在 x_0 处取得极值, 则 $f'(x_0) = 0$.

驻点定义: 如果 $f'(x_0) = 0$, 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的驻点.

(3) 极值的第一判定定理

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且在点 x_0 的某去心邻域内可导, 如果在该邻域内

- ① 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极大值;
- ② 当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的极小值;

③ 若在点 x_0 的两侧邻域内 $f'(x)$ 不变号，则 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值。

(4) 极值的第二判定定理

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0) = 0$ ， $f''(x_0) \neq 0$ 。

① 如果 $f''(x_0) > 0$ ，则 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极小值；

② 如果 $f''(x_0) < 0$ ，则 $f(x_0)$ 为函数 $f(x)$ 的极大值。

3、曲线的凹凸性及拐点

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导

① 如果曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内任意点的切线总位于曲线的下方，则称曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的；

② 如果曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内任意点的切线总位于曲线的上方，则称曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的。

连续曲线凹与凸的分界点称为曲线的拐点。

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内存在二阶导数。

① 如果在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凹的；

② 如果在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$ ，则曲线 $y = f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的。

4、函数的最大值最小值问题

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续且只有一个极值点 x_0 ，那么：

① 如果点 x_0 为极大值点，则 x_0 也是函数 $f(x)$ 在该区间内的最大值点；

② 如果点 x_0 为极小值点，则 x_0 也是函数 $f(x)$ 在该区间内的最小值点。

(2) 求函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上最值的一般步骤是：

① 求出函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有驻点和 $f'(x)$ 不存在的点；

② 求出①中所有点的函数值和端点的函数值；

③ 比较这些函数值的大小，其中函数值最大的就是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值，函数值最小的就是函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最小值。

5、曲线的水平渐近线与垂直渐近线

水平渐近线：

如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ (或 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ 或 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$)，则称直线 $y = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的 **水平渐近线**。

垂直渐近线：

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ (或 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$)，则称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的 **垂直渐近线**。

6、函数作图

我们陆续讨论了函数的各种性态，综合以上的讨论就可以描绘出函数的图形。具体方法如下：

- (1) 确定函数的定义域和值域；
- (2) 确定曲线关于坐标轴的对称性；
- (3) 求出曲线和坐标轴的交点；
- (4) 判断函数的单调区间并求出极值；
- (5) 确定函数的凹凸区间和拐点；
- (6) 求出曲线的渐近线；
- (7) 列表讨论并描绘函数的图形。

7、弧微分

8、导数的实际问题

(1) 常用的经济函数

在经济活动中，我们经常会遇到诸如成本、价格、需求、收益、利润、边际、弹性等经济量间的关系（函数）。下面我们就来学习几个常用的经济函数。

①需求函数

需求量受很多因素的影响，比如价格、偏好、收入、相关商品价格等，在这里只考虑价格对其的影响，其他因素暂时看作定值。

设 Q 表示对商品的需求量， P 表示商品的价格，则 $Q = Q(P)$ 称为需求函数。

一般地，需求量随着价格的上涨而减少。因此，通常需求函数是价格的递减函数。

需求函数 $Q = Q(P)$ 的反函数反映了商品价格随商品需求量变化的依赖关系，我们称其为价格函数，记为 $P = P(Q)$ 。

②供给函数

商品的供应者向社会提供的商品量称为商品供给量。在经济活动中，影响商品供给量的重要因素是商品价格。记商品供给量为 S ，商品价格为 P ，则 $S = S(P)$ 称为供给函数。

一般地，商品供给量随商品价格的上涨而增加。因此，商品供给函数是价格的递增函数。

产销平衡 理想状态下供给与需求处于平衡状态，即市场上的需求量等于供给量，生产的产品刚好全部卖出去。

③成本函数

总成本函数 总成本指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入的价格或费用总额，由固定成本和可变成本组成。设 C 是总成本， C_1 是固定成本， C_2 是可变成本，则总成本函数 $C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$ 。

平均成本函数 $\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_1 + C_2(Q)}{Q}$ 。

④收益函数

总收益函数 总收益表示生产者出售一定量产品得到的全部收入。设 Q 为商品销售量， $P = P(Q)$ 为商品价格，则总收益函数 $R = R(Q) = PQ = P(Q)Q$ 。

平均收益函数 $\bar{R} = \frac{R(Q)}{Q} = \frac{P(Q)Q}{Q} = P(Q)$ 。

⑤利润函数

总利润函数 总利润是指生产者出售一定的产品所得到的总收益与投入的总成本之差，即总利润函数 $L = L(Q) = R(Q) - C(Q)$ 。

(2) 边际方析

设函数 $y = f(x)$ 在某区间内可导，则称 $f'(x)$ 为 $y = f(x)$ 的边际函数， $f'(x_0)$ 为函数

$y = f(x)$ 当 $x = x_0$ 时的边际值。其意义是：当 $x = x_0$ 时，若 x 改变一个单位，函数值近似改变 $f'(x_0)$ 个单位。

下面我们来学习在经济学中经常用到的几个非常重要的边际概念。

① 边际成本

设总成本函数为 $C = C(Q)$ ，其中 C 表示总成本， Q 表示产量，则

$$C' = C'(Q)$$

称为边际成本函数。

边际成本 $C'(Q_0)$ 描述了产量为 Q_0 时，总成本 C 对产量 Q 的瞬时变化率，它的意义是：产量为 Q_0 时，若产量再增加一个单位，成本将增加 $C'(Q_0)$ 个单位。应注意边际成本与平均成本的区别。

② 边际收益

设某产品的总收益函数为 $R = R(Q)$ ，其中 R 表示总收益， Q 表示销售量，则

$$R' = R'(Q)$$

称为边际收益函数。

边际收益 $R'(Q_0)$ 描述了销售量为 Q_0 时，总收益 R 对销售量 Q 的瞬时变化率。它的意义是：产量为 Q_0 时，每多售出一个单位产品所增加的总收益。

③ 边际利润

设某产品的总利润函数为 $L = L(Q)$ ，其中 L 表示总利润， Q 表示产量或销售量，则

$$L' = L'(Q)$$

称为边际利润函数。

$L'(Q_0)$ 表示产量或销售量为 Q_0 时，再增加生产或销售一个单位产品时所增加的总利润。

如果总收益函数为 $R(Q)$ ，总成本函数为 $C(Q)$ ，则总利润为 $L(Q) = R(Q) - C(Q)$ ，
边际利润为 $L'(Q) = R'(Q) - C'(Q)$ 。

(3) 弹性分析

设函数 $y = f(x)$ 在 x 处可导且 $f(x) \neq 0$ ，则 $y = f(x)$ 在 x 处的弹性记作

$$\frac{Ey}{Ex} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)},$$

其中， $\frac{Ey}{Ex} = x \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}$ 的值与 x 有关，是 x 的函数，称为弹性函数。它反映随 x 的变化 $f(x)$ 变化幅度的大小，也就是 $f(x)$ 对 x 变换反应的强烈程度或灵敏度。当 $x = x_0$ 时，弹性为 $\frac{Ey}{Ex} \big|_{x=x_0} = x_0 \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$ ，其意义是：当 $x = x_0$ 时，若自变量变化 1%，函数值 y 将变化 $\frac{Ey}{Ex} \big|_{x=x_0} \%$ 。

① 需求对价格的弹性

设某商品的需求函数为 $Q = f(P)$ ，且在 P 处可导。一般地，需求函数是单调减少的函数，故，即价格与需求量的变化是负相关的，但是为了便于比较，我们在求需求弹性时加上负号，但它并不影响判断需求量对价格相对变动反应的灵敏程度。则需求量 Q 对价格 P 的弹性为

$$\frac{EQ}{EP} = -P \frac{f'(P)}{f(P)}.$$

当 $P = P_0$ 时，需求弹性为

$$\frac{EQ}{EP} \big|_{P=P_0} = -P_0 \frac{f'(P_0)}{f(P_0)},$$

其经济意义是：当价格为 P_0 时，若价格上涨（下降）1%，需求量将减少（增加）

$$\frac{EQ}{EP} \big|_{P=P_0} \%.$$

在市场分析中，价格弹性是一个非常重要的经济参数，价格弹性一般根据其大小在市场中分为三种情形：

a. 如果 $\frac{EQ}{EP} < 1$ ，称为缺乏弹性的商品，表示其需求变动的幅度小于价格变动的幅度，通常是日常生活中的必需品。

b. 如果 $\frac{EQ}{EP} > 1$ ，称为富有弹性的商品，表示其需求变动的幅度大于价格变动的幅度，通常是高档消费品。

c. 如果 $\frac{EQ}{EP} = 1$ ，称为单位弹性的商品，表示其需求变动的幅度等于价格变动的幅度。

② 用需求弹性分析总收益的变化

设销售量 Q 是价格 P 的函数，即 $Q = f(P)$ ，总收益 $R = PQ$ ，总收益 R 对 P 求导，得

$$R' = \frac{dR}{dP} = Q + \frac{dQ}{dP}P = Q \left(1 + \frac{dQ}{dP} \cdot \frac{P}{Q} \right) = Q \left(1 - \frac{EQ}{EP} \right).$$

a.如果 $\frac{EQ}{EP} < 1$ ，此时商品是缺乏弹性的商品， $R' > 0$ ，因此 R 单调递增。即若价格上涨，总收益增加；价格下降，总收益减少。

b.如果 $\frac{EQ}{EP} > 1$ ，此时商品是富有弹性的商品， $R' < 0$ ，因此 R 单调递减。即若价格上涨，总收益减少；价格下降，总收益增加。

c.如果 $\frac{EQ}{EP} = 1$ ，需求变动的幅度等于价格变动的幅度，此时 $R' = 0$ ，总收益取得最大值。