函数

考点一：函数的概念

1、定义域、值域及表达式

设D是一个给定的非空实数集合，如果存在一个对应法则f，使得对每一个$x \in D$，都有唯一确定的值y与之对应，则这个对应法则f称为定义在集合D上的一个函数，并将由对应法则f所确定的x与y之间的对应关系记为

$$y = f(x), \quad x \in D,$$

称x为自变量，y为因变量，D为函数的定义域，记作D_f，即$D_f = D$.

（1）定义域：自变量x的取值范围叫做函数的定义域.

（2）值域：当x取遍D内各个数值时，相应的函数值$f(x)$的全体组成的数集

$$R_f = \left\{y | y = f(x), \quad x \in D\right\}$$

称为函数的值域.

（3）判断函数是否为同一函数：

函数的概念有两个基本要素

$$\begin{cases} \text{定义域: 自变量} x \text{的取值范围;} \\ \text{对应法则：给定} x \text{值，求} y \text{值的规律，即函数的依赖关系.} \end{cases}$$

当且仅当两个函数的定义域与对应法则完全相等时，两个函数才表示同一函数，即两个函数相同的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

2、分段函数

在定义域内不同的区间上对应法则用不同的解析式表示的函数，称为分段函数.

考点二：函数的性质

1、单调性：

设函数$y = f(x)$在某区间内有定义，对于该区间内任意两点x_1, x_2，

如果$x_1 < x_2$，恒有$f(x_1) < f(x_2)$，则称函数$y = f(x)$在该区间内单调增加；

如果$x_1 < x_2$，恒有$f(x_1) > f(x_2)$，则称函数$y = f(x)$在该区间内单调减少．

2、奇偶性：

设$f(x)$的定义域D关于原点对称（即若$x \in D$，则有$-x \in D$）．

如果对于D内任意一点x，恒有$f(-x) = f(x)$，则称函数$f(x)$为D内的偶函数；

如果对于D内任意一点x，恒有$f(-x) = -f(x)$，则称函数$f(x)$为D内的奇函数．

3、周期性

设$f(x)$的定义域为D，若存在$T > 0$，对于任意$x \in D$，有$(x \pm T) \in D$，且恒有$f(x \pm T) = f(x)$，则称函数$y = f(x)$为周期函数，T称为函数$f(x)$的周期，使上述关系式成立的最小正数T，称为函数$f(x)$的最小正周期．

通常我们说周期函数的周期是指最小正周期．

4、有界性

设函数$y = f(x)$在某区间内有定义，若存在$M > 0$，对于该区间内任意的x，恒有$|f(x)| \leq M$，则称函数$f(x)$在该区间内为有界函数．

若这样的正数M不存在，则称$f(x)$在该区间内为无界函数．

考点三：反函数

1、反函数的概念及性质

（1）反函数的定义：设函数$y = f(x)$的定义域是D_f，值域是R_f．如果对于R_f内的每一个y，由$y = f(x)$可以确定唯一的$x \in D_f$，这样在R_f上定义了一个以y为自变量的函数，称为$y = f(x)$的反函数，记为

$x = f^{-1}(y)$或$x = \varphi(y)$，$y \in R_f$．

（2）由反函数的定义，有

$$y \equiv f\left(f^{-1}(y)\right), y \in R_f;$$
$$x \equiv f^{-1}\left(f(x)\right), x \in D_f.$$

2、反函数的运算

求函数的反函数分为三步：

（1）由$y = f(x)$，解出$x = f^{-1}(y)$，即用y表示x；

（2）将x、y互换，得到$y = f^{-1}(x)$；

（3）注明反函数的定义域，即原来函数的值域.

考点四：函数的运算

1、函数的四则运算：

给定两个函数$f(x)(x \in D_1)$和$g(x)(x \in D_2)$，记$D = D_1 \cap D_2$，并设$D \neq \emptyset$. 我们定义$f(x)$与$g(x)$在D上的和、差、积运算如下:

$$F(x) = f(x) + g(x), x \in D,$$
$$G(x) = f(x) - g(x), x \in D,$$
$$H(x) = f(x)g(x), x \in D.$$

若在D中剔除使$g(x) = 0$的x值，即令

$$D^* = D_1 \cap \{x|g(x) \neq 0, x \in D_2\} \neq \emptyset,$$

可在D^*上定义$f(x)$与$g(x)$的商的运算如下:

$$L(x) = \frac{f(x)}{g(x)}，\ x \in D^*.$$

2、函数的复合运算：

函数的复合运算：

设函数$y = f(u)$的定义域为D_f，函数$u = g(x)$的定义域为D_g，且其值域$R_g \subset D_f$，则由下式确定的函数称

$$y = f[g(x)], x \in D_g$$

称为由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$构成的复合函数，它的定义域为D_g，变量u称为中间变量，f称为外函数，g称为内函数. 函数$f(u)$和$g(x)$按照“先$g(x)$后$f(u)$”次序的复合运算也可简记为$f \circ g$.

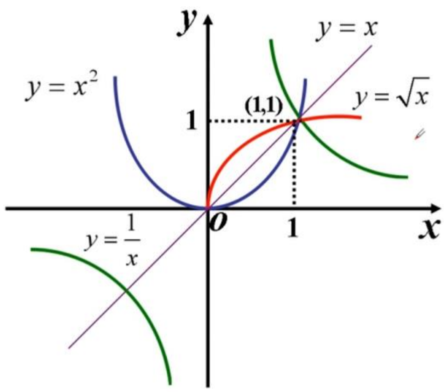
考点五：基本初等函数

1、幂函数$y = x^{\mu}$（μ为实数）

（1）定义域

它的定义域随μ而异，但不论μ为何值，$y = x^{\mu}$在$(0, +\infty)$内总有定义，且图像都通过点$(1,1)$．当$\mu = 0$时，$y = 1$是常数函数．

（2）图像



（3）性质

① 当$\mu > 0$时，在第一象限内，函数单调增加，如$y = x$，$y = x^2$，$y = x^{\frac{1}{2}}$．

② 当$\mu < 0$时，在第一象限内，函数单调减少，如$y = x^{-1}$，$y = x^{-2}$．

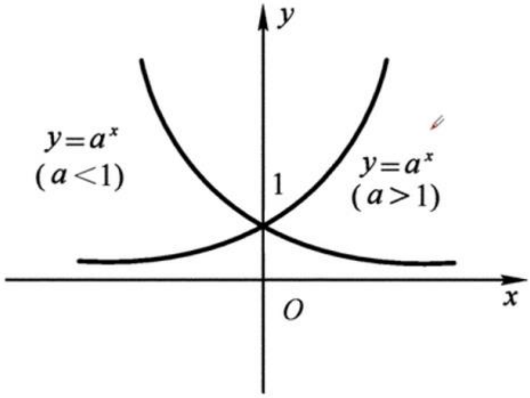
③ 当$\mu \neq 0$时，函数$y = x^{\mu}$是无界函数．当$\mu = 2n$，$n \in Z$时，函数$y = x^{\mu}$为偶函数；当$\mu = 2n + 1$，$n \in Z$时，函数$y = x^{\mu}$为奇函数．

2、指数函数$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

（1）定义域

它的定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$(0, +\infty)$，指数函数$y = a^x$的图像都经过点$(0,1)$．

（2）图像



（3）性质

当$a > 1$时，函数单调增加，当$0 < a < 1$时，函数单调减少.

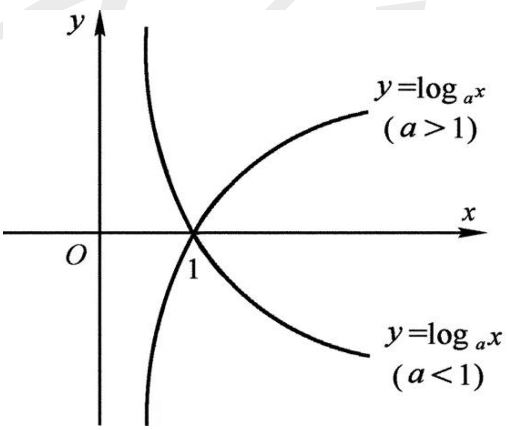
不论a为何值，函数$y = a^x$均为无界函数，且为非奇非偶函数.

3、对数函数$y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$

（1）定义域

它的定义域为$(0, +\infty)$，值域为$(-\infty, +\infty)$，对数函数$y = \log_a x$的图像都经过点$(1,0)$.

（2）图像



（3）性质

当$a > 1$时，函数单调增加，当$0 < a < 1$时，函数单调减少.

不论a为何值，函数$y = \log_a x$均为无界函数，且为非奇非偶函数.

以$a = e$为底的对数称为自然对数，简记为$y = \ln x$；而以$a = 10$为底的对数称为常

用对数，记为$y=\lg x$.

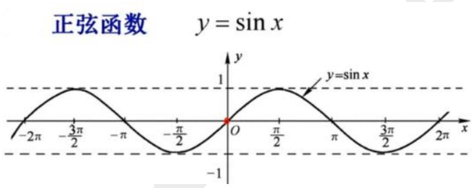
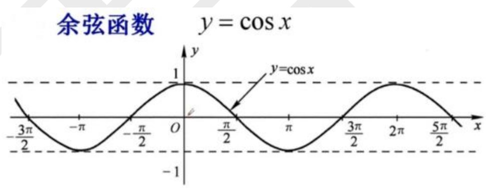
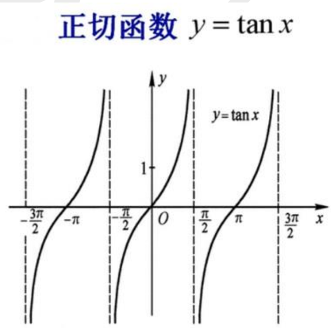
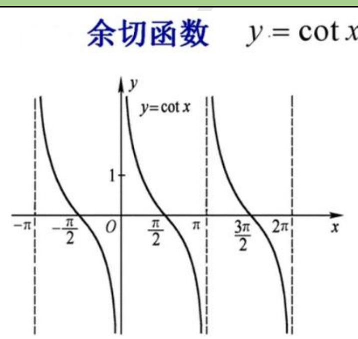
4、三角函数

（1）定义域

正弦函数$y=\sin x$与余弦函数$y=\cos x$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$，值域均为$[-1,1]$.

正切函数$y=\tan x$的定义域为$\left\{x|x\in R，且x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi，k\in Z\right\}$. 余切函数$y=\cot x$的定义域为$\left\{x|x\in R，且x\neq k\pi，k\in Z\right\}$. 它们的值域均为$(-\infty,+\infty)$.

（2）图像

正弦函数	余弦函数
	
正切函数	余切函数
	

（3）性质

因为$\sin(-x)=-\sin x$，$\cos(-x)=\cos x$，所以$y=\sin x$为奇函数，$y=\cos x$为偶函数. 又因为$|\sin x|\leq 1$，$|\cos x|\leq 1$，所以$y=\sin x$和$y=\cos x$都是有界函数，且都是以2π为周期.

$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$，故$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=-\tan x$，所以$y=\tan x$为奇函数. 同理，

$y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$也为奇函数．而$y=\tan x$和$y=\cot x$都是无界函数，且都以$\pi$为周期．

5、反三角函数

（1）定义域

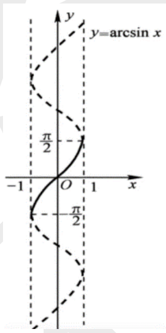
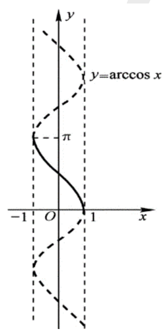
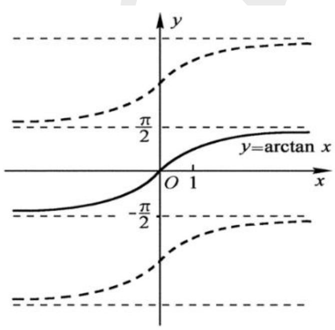
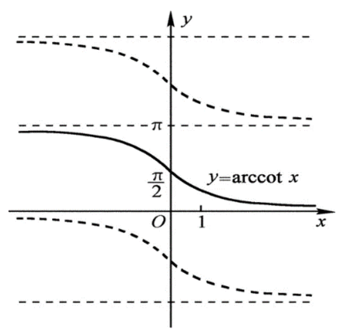
反正弦函数$y=arcsinx$是$y=\sin x$在区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的反函数，定义域是$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$．

反余弦函数$y=arccosx$是$y=\cos x$在区间$[0,\pi]$上的反函数，定义域是$[-1,1]$，值域是$[0,\pi]$．

反正切函数$y=arctanx$是$y=\tan x$在区间$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数，定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$．

反余切函数$y=arccotx$是$y=\cot x$在区间$(0,\pi)$上的反函数，定义域是$(-\infty,+\infty)$，值域是$(0,\pi)$．

（2）图像

反正弦函数	反余弦函数
	
反正切函数	反余切函数
	

（3）性质

反正弦函数$y = arcsinx$在定义域内单调增加，又$|arcsinx| \le \frac{\pi}{2}$，所以$y = arcsinx$是有界函数，且在其定义域内是奇函数.

反余弦函数$y = arccosx$在定义域内单调减少，又$0 \le arccosx \le \pi$，所以$y = arccosx$是有界函数，且在其定义域内是非奇非偶函数.

反正切函数$y = arctanx$在定义域内单调增加，又$|arctanx| < \frac{\pi}{2}$，所以$y = arctanx$是有界函数，且在其定义域内是奇函数.

反余切函数$y = arccotx$在定义域内单调减少，又$0 < arccotx < \pi$，所以$y = arccotx$是有界函数，且在其定义域内是非奇非偶函数.

以上五种函数统称为基本初等函数.

考点六：初等函数

由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和复合运算所构成，并能用一个解析式表示的函数称为初等函数.