极限

考点一：数列极限

1、数列极限的定义

如果当$n \to \infty$时，数列$\{x_n\}$无限趋近于某一个确定的常数a，则称常数a为数列$\{x_n\}$当$n \to \infty$时的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\text{或者}x_n \to a(n \to \infty),$$

上式可读作“当n趋于无穷大时，x_n的极限等于a或x_n趋于 a”．

如果不存在这样的常数a，就说数列$\{x_n\}$没有极限，或者说数列$\{x_n\}$发散，习惯上也称$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在.

2、数列极限的性质

（1）（唯一性）收敛数列极限必唯一.

（2）（有界性）收敛数列必有界.

（3）（夹逼准则）对于三个数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{z_n\}$，如果满足从某项开始，存在正整数N，当$n > N$时，有$x_n \le y_n \le z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{x\to\infty} z_n = a$，则$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

（4）（单调有界准则）单调有界数列必有极限.

（5）（四则运算法则）设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则

① $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha x_n \pm \beta y_n) = \alpha A \pm \beta B$（$\alpha,\beta$为常数）;

② $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = AB$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}(B \ne 0).$

考点二：函数极限

1、函数极限的定义

（1）当$x \to x_0$时，函数$f(x)$的极限

① 设函数$f(x)$在x_0的某个去心邻域内有定义，如果当$x \to x_0$时，函数$f(x)$无限趋

近于某一确定的常数A，则称A为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A\text{或者}f(x) \to A(x \to x_0).$$

② 如果函数$f(x)$在x_0的某一个右侧邻域$(x_0, x_0+\delta)(\delta > 0)$内有定义，当$x$从$x_0$的右侧趋近于$x_0$(记作$x \to x_0$)时，函数$f(x)$无限趋近于某一确定的常数$A$，则称$A$为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A\text{或者}f(x_0^+) = A.$$

③ 如果函数$f(x)$在x_0的某一个左侧邻域$(x_0-\delta, x_0)(\delta > 0)$内有定义，当$x$从$x_0$的左侧趋近于$x_0$(记作$x \to x_0$)时，函数$f(x)$无限趋近于某一确定的常数$A$，则称$A$为函数$f(x)$当$x \to x_0$时的左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A\text{或者}f(x_0^-) = A.$$

（2）当$x \to \infty$时，函数$f(x)$的极限

如果当$x \to \infty$时，函数$f(x)$无限趋近于某一个确定的常数A，则称常数A为函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A\text{或者}f(x) \to A(x \to \infty).$$

如果当$x \to +\infty$时，函数$f(x)$无限趋近于某一个确定的常数A，则称常数A为函数$f(x)$当$x \to +\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A\text{或者}f(x) \to A(x \to +\infty).$$

如果当$x \to -\infty$时，函数$f(x)$无限趋近于某一个确定的常数A，则称常数A为函数$f(x)$当$x \to -\infty$时的极限，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A\text{或者}f(x) \to A(x \to -\infty).$$

2、函数极限的性质

(1)（唯一性）若函数$f(x)$在点x_0处极限存在，并有$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} f(x) = B$，则$A = B$，即极限唯一.

（2）（局部有界性）如果$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，那么存在常数$M > 0$和$\delta > 0$，使得当$0 <$

$|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|\le M.$$

(3)（局部保号性）如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$（或$A<0$），那么存在常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）.

(4)（夹逼准则）如果对于x_0的某一去心邻域内的一切x，都有

① $g(x)\le f(x)\le h(x)$，

② $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，

则

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

(5)（四则运算法则）设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}[\alpha f(x)\pm\beta g(x)]=\alpha A\pm\beta B$（$\alpha$，$\beta$为常数）；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=AB$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\ne 0)$.

3、两个重要极限

(1) 重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

(2) 重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

4、无穷小与无穷大

(1) 无穷小与无穷大的定义

① 如果函数$f(x)$当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的极限为零，则称函数$f(x)$为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小量，简称无穷小.

② 如果当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数$f(x)$的绝对值无限增大，则称函数$f(x)$为$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷大量，简称无穷大，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty.$$

(2) 无穷小与无穷大的关系

在同一极限过程中，

① 若函数$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大；

② 若函数$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小.

（3）无穷小量的性质

① 有限个无穷小的代数和仍为无穷小.

② 有界函数与无穷小的积仍为无穷小.

③ 常数与无穷小之积仍为无穷小.

④ 有限个无穷小之积仍为无穷小.

5、无穷小量的比较及等价无穷小求极限

（1）无穷小的比较

设在同一个自变量的变化过程中有$\lim\alpha(x)=0,\lim\beta(x)=0$，且$\beta(x)\neq 0$.

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小，记为$\alpha(x)=o[\beta(x)]$；

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小；

若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶无穷小;

特别地，若$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小，记为$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

（2）常见的等价无穷小

当$x\to 0$时，

① $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^{x}-1\sim arcsinx\sim arctanx$；

② $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$；

③ $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$.

（3）等价无穷小的重要性质

① 在同一极限过程中，若$\alpha(x)\sim\beta(x)$，$\beta(x)\sim\gamma(x)$，则$\alpha(x)\sim\gamma(x)$. 这个性质称为等价无穷小的传递性.

② 在同一极限过程中，若$\alpha(x)\sim\alpha^{*}(x)$，$\beta(x)\sim\beta^{*}(x)$，且$\lim\frac{\alpha^{*}(x)}{\beta^{*}(x)}$存在，则

$$\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\frac{\alpha^{*}(x)}{\beta^{*}(x)}.$$