导数与微分

考点一：导数的概念

1、导数的概念及其几何意义

（1）导数的定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某个领域内有定义，在点x_0处给自变量x一个改变量$\Delta x\neq 0$（$x_0+\Delta x$也在该邻域内），相应地函数y有改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数$y=f(x)$在点x_0处可导，并称此极限为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，或称函数在点x_0处的变化率，记作$y'|_{x=x_0}$，$\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$，$\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}$或$f'(x_0)$.

（2）左导数与右导数

如果函数$y=f(x)$在点x_0及其左侧领域内有定义，当$\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$存在时，则称该极限值为函数$f(x)$在点$x_0$处的左导数，记为$f_-'(x_0)$.

同理，定义右导数为$f_+'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

（3）导数的几何意义

如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则曲线$y=f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处必定存在切线，且该切线的斜率为$f'(x_0)$，则有曲线$y=f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

如果$f'(x_0)\neq 0$，则此曲线$y=f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

若$f'(x_0)=0$，则曲线$y=f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线方程为$y=f(x_0)$，法线方程为$x=x_0$.

若$f'(x_0)=\infty$，则曲线$y=f(x)$在点$\left(x_0,f(x_0)\right)$处的切线方程为$x=x_0$，法线方程为$y=f(x_0)$.

2、导数的物理意义

$f'(x_0)$指函数$f(x)$在点x_0处对自变量的变化率．很多物理量都是借助变化率定义的．例如，角速度是角度（作为时间的函数）对时间的变化率；电流是电量（作为时间的函数）对时间的变化率；瞬时功率是功（作为时间的函数）对时间的变化率；瞬时电动势是磁通量（作为时间的函数）对时间的变化率．最常用的是瞬时速度，如位移函数$s=s(t)$，则物体在时刻t_0的瞬时速度$v_{t_0}=s'(t_0)$．

3、导数的经济意义

4、函数可导与连续性的关系

如果函数$y=f(x)$在点x_0处可导，则函数$f(x)$在点x_0处连续（反之不成立）．

考点二：函数的求导法则

1、导数的四则运算法则

设$u(x)$，$v(x)$均可导，则

（1）$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$．

（2）$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$．

（3）$[Cu(x)]'=Cu'(x)$(C为常数)．

（4）$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}(v(x)\neq 0)$．

2、复合函数的求导法则

如果函数$u=u(x)$在点x处可导，函数$y=f(u)$在对应点u处可导，则复合函数$y=f[u(x)]$在点x处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx},$$

也可记为

$y'=f'[u(x)]\cdot u'(x)$．

推论（1）设$y=f(x)$具有单调、连续的反函数$x=f^{-1}(y)$，则有

$$[f^{-1}(y)]'=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{f'(x)}.$$

3、基本初等函数的导数公式

（1）$C'=0$（C为常数）.

（2）$(x^n)'=nx^{n-1}$（n为实数）.

（3）$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(a>0,a\neq 1)$.

（4）$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

（5）$(a^x)'=a^x\ln a\,(a>0,a\neq 1)$.

（6）$(e^x)'=e^x$.

（7）$(\sin x)'=\cos x$.

（8）$(\cos x)'=-\sin x$.

（9）$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$.

（10）$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$.

（11）$(\sec x)'=\sec x\tan x$.

（12）$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

（13）$(arcsinx)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

（14）$(arccosx)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

（15）$(arctanx)'=\frac{1}{1+x^2}$.

（16）$(arccotx)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

4、导函数的奇偶性

性质1：若函数$f(x)$是关于原点对称的区间D上的可导偶函数，则$f'(x)$是D上的奇函数.

性质2：若函数$f(x)$是关于原点对称的区间D上的可导奇函数，则$f'(x)$是D上的偶函数.

考点三：高阶导数

1、高阶导数的定义：

如果函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$在点x处的导数$[f'(x)]'$存在，则称$[f'(x)]'$为函数$y=f(x)$的二阶导数，记作

$$f''(x)，y''，\frac{d^2y}{dx^2}或\frac{d^2f(x)}{dx^2}.$$

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，三阶导数的导数称为四阶导数……函数$y=f(x)$的$(n-1)$阶导数的导数称为$y=f(x)$的n阶导数，记作

$$f^{(n)}(x)，y^{(n)}，\frac{d^ny}{dx^n}或\frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

函数$y=f(x)$具有n阶导数也称为n阶可导，二阶和二阶以上的导数称为高阶导数.

函数$f(x)$的一阶、二阶、和三阶导数分别表示为$f'(x),f''(x)$和$f'''(x)$，四阶及以上导数表示为$f^{(n)}(x)$，其中$n\geq 4$．可见求高阶导数就是接连的求导.

2、常用的高阶导数公式

(1) $(e^x)^{(n)}=e^x$;

(2) $(a^x)^{(n)}=a^x\cdot\ln^n a(a>0)$;

(3) $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(4) $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $(x^m)^{(n)}=0$（正整数$m<n$）；

(6) $(x^m)^{(n)}=\frac{m!}{(m-n)!}x^{m-n}$（正整数$m<n$）；

(7) $(x^n)^{(n)}=n!$;

(8) $(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$.

考点四：函数的微分

1、微分的定义及几何意义

(1) 微分的定义

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，$x_0+\Delta x$在该邻域内，若函数在x_0处的改变量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),$$

其中A是不依赖于Δx的常数，$o(\Delta x)$是比Δx高阶的无穷小（$\Delta x \to 0$时），则称函数$f(x)$在点x_0处可微，其中$A\Delta x$称为函数$f(x)$在点x_0处相应于Δx的微分，记为$dy|_{x=x_0}$，即

$$dy|_{x=x_0} = A\Delta x.$$

（2）可导与可微的关系

函数$y = f(x)$在点x_0处可微的充分必要条件是$f(x)$在点x_0处可导，即可导与可微等价且

$$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx.$$

（3）微分的几何意义

微分$dy|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$是当$x$有增量$\Delta x$时，曲线$y = f(x)$在点$(x_0, y_0)$处的切线的纵坐标的增量．当$\Delta x \to 0$时，用$dy$近似代替$\Delta y$就是用点$M(x_0, y_0)$处的切线纵坐标增量$QP$来近似代替曲线$y = f(x)$的纵坐标增量$QN$．

如果函数$y = f(x)$在点x_0处可导，则函数$f(x)$在点x_0处连续．

2、基本初等函数的微分公式

（1）$d(C) = 0$（C为常数）．

（2）$d(x^n) = nx^{n-1}dx$（n为实数）．

（3）$d(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a}dx(a > 0, a \neq 1)$．

（4）$d(\ln x) = \frac{1}{x}dx$．

（5）$d(a^x) = a^x \ln a\, dx(a > 0, a \neq 1)$．

（6）$d(e^x) = e^x dx$．

（7）$d(\sin x) = \cos x\, dx$．

（8）$d(\cos x) = -\sin x\, dx$．

（9）$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x}dx = \sec^2 x dx$．

（10）$d(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x}dx = -\csc^2 x dx$．

（11）$d(\sec x)=\sec x\tan x\,dx$.

（12）$d(\csc x)=-\csc x\cot x\,dx$.

（13）$d(arcsinx)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

（14）$d(arccosx)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

（15）$d(arctanx)=\frac{1}{1+x^2}dx$.

（16）$d(arccotx)=-\frac{1}{1+x^2}dx$.

3、微分的四则运算法则

设$u=u(x)$，$v=v(x)$均可微，则

（1）$d(u\pm v)=du\pm dv$.

（2）$d(uv)=vdu+udv$.

（3）$d(Cu)=Cdu$(C为常数).

（4）$d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}(v\neq 0)$.

4、一阶微分形式不变性及应用

一阶微分形式不变性：

如果函数$y=f(u)$可微，函数$u=u(x)$也可微，则复合函数$y=f[u(x)]$的微分为

$$dy=f'(u)\cdot u'(x)dx=f'(u)du.$$

由此可见，不论u是自变量还是中间变量，函数的微分总保持$dy=f'(u)du$的形式．这一性质称为一阶微分形式不变性．

考点五：隐函数及由参数方程所确定的函数的求导方法

1、隐函数的导数

求由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$的导数时，有以下三种方法可采用．

（1）利用复合函数求导法则

第一步：方程两边同时对x求导，遇到y的表达式，把y看作x的函数，即先对y求导，再乘以y对x的导数y'，得到一个含有x，y，y'的方程，方程中所含y'的数量应与原方程

中所含y的数量相等；

第二步：求解上述方程，得出导数y'.

（2）利用一阶微分形式的不变性

方程两边同时微分，得到一个含有dx，dy的方程，从中求出$\frac{dy}{dx}$，即为所求.

（3）公式法

设$y=y(x)$是由$F(x,y)=0$确定的隐函数，则$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$（当$F_y(x,y)\neq 0$时）.

可导一定连续，连续不一定可导.

2、由参数方程所确定的函数的导数

设y与x的函数关系是由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

确定的，则称此函数关系表达式的函数为由参数方程确定的函数. 其导数$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$,

即$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$或$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.