连续

考点一：函数连续的概念

1、连续的定义

（1）连续的定义

定义① 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续，x_0称为函数$f(x)$的连续点.

定义② 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义，如果有

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称函数$y=f(x)$在点x_0处连续.

（2）左连续与右连续

① 函数$f(x)$在点x_0以及x_0的某一左侧邻域内有定义，若有$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处左连续.

② 函数$f(x)$在点x_0以及x_0的某一右侧邻域内有定义，若有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处右连续.

③ 函数$f(x)$在点x_0处连续的充分必要条件是函数$f(x)$在点x_0处左连续且右连续.

2、函数间断点及其分类

（1）函数间断点的定义

设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内有定义. 在此前提下，如果函数$f(x)$有下列三种情形之一：

① 在点$x=x_0$处没有定义；

② 虽在$x=x_0$处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

③ 虽在$x=x_0$处有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$，

则函数$f(x)$在点x_0处不连续，且点x_0称为函数$f(x)$的间断点或不连续点.

（2）函数间断点的分类

① 第一类间断点：若点$x = x_0$是函数$f(x)$的间断点，且左极限$f(x_0^-)$及右极限$f(x_0^+)$都存在，那么$x = x_0$称为函数$f(x)$的第一类间断点.

a.在第一类间断点中，若$f(x_0^-) = f(x_0^+)$，即$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在，则称$x = x_0$为可去间断点.

b.在第一类间断点中，若$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$，则称$x = x_0$为跳跃间断点.

② 不是第一类间断点的任何间断点，称为第二类间断点.

a.若 x_0为函数$f(x)$的第二类间断点，且当$x \to x_0$时，函数$f(x) \to \infty$，则称$x = x_0$为函数$f(x)$的无穷间断点.

b.若 x_0为函数$f(x)$的第二类间断点，且当$x \to x_0$时，函数$f(x)$的极限不存在，呈上下振荡情形，则称$x = x_0$为函数$f(x)$的振荡间断点.

考点二：连续函数的运算及初等函数的连续性

1、函数连续的性质

（1）连续函数的四则运算

设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续，则它们的和差$f + g$、积$f \cdot g$及商$\frac{f}{g}$（当$g(x_0) \neq 0$时）都在点x_0处连续.

（2）设函数$y = f[g(x)]$由函数$y = f(u)$与函数$u = g(x)$复合而成，$U(x_0) \subset D_{f \circ g}$. 若$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，而函数$y = f(u)$在$u = u_0$处连续，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0).$$

（3）复合函数的连续性

设函数$y = f[g(x)]$由函数$y = f(u)$与函数$u = g(x)$复合而成，$U(x_0) \subset D_{f \circ g}$. 若函数$u = g(x)$在$x = x_0$处连续，且$g(x_0) = u_0$，而函数$y = f(u)$在$u = u_0$处连续，则复合函数$y = f[g(x)]$在$x = x_0$处也连续.

2、初等函数的连续性

（1）基本初等函数在其定义域内为连续函数.

（2）初等函数在其定义区间内为连续函数.

考点三：闭区间上连续函数的性质

1、有界性与最值

（1）(有界性定理)若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必有界.

（2）(最大值和最小值定理) 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上必定取得最大值和最小值.

2、介值定理：

（1）（零点定理）若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号（即$f(a)f(b)<0$），则至少存在一点$\xi\in(a,b)$使得

$$f(\xi)=0.$$

（2）设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且在区间的端点取不同的函数值$f(a)=A$及$f(b)=B$，则对于A和B之间的任意一个数C，在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C(a<\xi<b).$$

推论：设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，M和m分别是$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值，则对于满足$m<\mu<M$的任何实数μ，至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f(\xi)=\mu.$$