

## 第一章 行列式

### 考点一：行列式的定义

#### 1、二阶与三阶行列式计算

##### (1) 二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

##### (2) 三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

#### 2、行列式中元素的余子式和代数余子式的定义

$$(1) \text{ } n \text{ 阶行列式 } D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

##### (2) 余子式

在  $D$  中划去元素  $a_{ij}$  在第  $i$  行和第  $j$  列后剩下的  $n-1$  行和  $n-1$  列元素，按原来的相对顺序组成一个  $n-1$  阶行

$$\text{列式，记为 } M_{ij}, \text{ 即 } M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

##### (3) 代数余子式

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  称为元素  $a_{ij}$  的代数余子式。

### 考点二：行列式按行（列）展开

$n$  阶行列式  $D = |a_{ij}|$  等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

$$D = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}, \quad j=1, 2, \cdots, n.$$

### 考点三：行列式的性质与计算

#### 1、行列式的性质

- (1) 行列式和它的转置行列式相等。
- (2) 用数  $k$  乘行列式  $D$  中某一行（列）的所有元素所得到的行列式等于  $kD$ 。这也就是说，行列式可以按行或按列提出公因数。
- (3) 互换行列式的任意两行（列），行列式的值改变符号。
- (4) 如果行列式中某两行（列）的对应元素成比例，则此行列式的值等于零。

(5) 若行列式的某一行(列)的元素是两个数之和,例如第  $i$  行的元素都是两个数之和,则这个行列式可以拆成两个行列式之和。

(6) 把行列式  $D$  的某一行(列)的所有元素都乘以同一个数以后加到另一行(列)的对应元素上去,所得的行列式仍为  $D$ 。

定理:  $n$  阶行列式  $D = |a_{ij}|$  的任意一行(列)各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式的乘积之和等于零。即  $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \dots + a_{in}A_{kn} = 0$  ( $i \neq k$ ), 或  $a_{1j}A_{1s} + a_{2j}A_{2s} + \dots + a_{nj}A_{ns} = 0$  ( $j \neq s$ )。

## 2、行列式的计算

行列式的计算主要采用以下两种基本方法:

(1) **利用行列式的性质**,把原行列式化为容易求值的行列式。常用的方法是把原行列式化为上三角(或下三角)行列式再求值。此时要注意的是,在互换两行或两列时,必须新的行列式的前面乘上  $-1$ 。在按行或按列提取公因子  $k$  时,必须新的行列式前面乘上  $k$ 。

(2) 把原行列式按选定的某一行或某一列展开,把行列式的阶数降低,再求出它的值。通常是先利用性质 6 在某一列或某一行中产生很多个“0”元素,再按包含 0 最多的行或列展开。

## 3、特殊行列式的计算

### (1) 对角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

### (2) I 型三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

### (3) II 型三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ a_{n,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n-1,2}a_{n1}.$$

### (4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

## 考点四：克拉默法则



## 第二章 矩阵

### 考点一：线性方程组与矩阵的定义

#### 1、矩阵的定义

由  $m \times n$  个数  $a_{ij} (i=1,2,\dots,m; j=1,2,\dots,n)$  排成的一个  $m$  行  $n$  列的数表 
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
 称为一个  $m$  行  $n$  列矩

阵，记作  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ .

#### 2、几种特殊的矩阵

(1) 零矩阵  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ .

(3) 数量矩阵  $\Lambda = \begin{pmatrix} a & & \\ & a & \\ & & \ddots \\ & & & a \end{pmatrix}$ .

(5) 上三角矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(7) 对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(2) 对角矩阵  $\Lambda = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$ .

(4) 单位矩阵  $E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ .

(6) 下三角矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

(8) 反对称矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ -a_{12} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & 0 \end{pmatrix}$

### 考点二：矩阵运算

#### 1、加减运算

设  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B=(b_{ij})_{m \times n}$ , 则  $A \pm B=(a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}$ .

运算律: (1)  $A+B=B+A$ .

(2) 结合律  $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) 消去律  $A+C=B+C \Leftrightarrow A=B$

(4)  $A+O=A$ ,  $A+(-A)=O$

#### 2、数乘运算

设  $A=(a_{ij})_{m \times n}$ ,  $k$  为一个数, 则  $kA=(ka_{ij})_{m \times n}$

运算律: (1) 结合律  $(kl)A=k(lA)=l(kA)$ .

(2) 分配律  $k(A+B)+C=kA+kB$ ,  $(k+l)A=kA+lA$ .

#### 3、乘法运算

设  $A=(a_{ij})_{m \times k}$ ,  $B=(b_{ij})_{k \times n}$ , 则  $AB=(c_{ij})_{m \times n}=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ik}b_{kj})_{m \times n}$ .

运算律: (1) 结合律  $(AB)C=A(BC)$ ,  $k(AB)C=(kA)B=A(kB)$ .

(2) 分配律  $(A+B)C=AC+BC$ ,  $A(B+C)=AB+AC$ .

注意 (1) 乘法一般不满足交换律, 即一般地  $AB \neq BA$ .

(2) 乘法一般不满足消去律, 即若  $AB=AC$ , 一般地  $B \neq C$ .

(3) 非零矩阵的乘积可能是零矩阵, 即若  $AB=0$ , 一般不能推出  $A=0$  或  $B=0$ .

#### 4、方阵的幂

设  $A$  为  $n$  阶方阵, 则  $A^m = \underbrace{AA \dots A}_{m \text{ 个}}$ .

运算律: (1)  $A^k A^l = A^{k+l}$ .

(2)  $(A^k)^l = A^{kl}$ .

(3) 当  $AB=BA$  时,  $(AB)^k = A^k B^k$ .

注意: (1)  $(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$ .

(2)  $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) \Leftrightarrow AB = BA$ .

(3) 当  $AB=BA$  时,  $(AB)^k = A^k B^k$ .

#### 5、转置运算

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $A^T = (a_{ij})_{n \times m}$ .

运算律: (1)  $(A^T)^T = A$ .

(2)  $(kA)^T = kA^T$ .

(3)  $(A+B)^T = A^T + B^T$ .

(4)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

(5)  $(A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k^T A_{k-1}^T \dots A_2^T A_1^T$ .

#### 6、方阵的行列式

(1) 行列式的定义

设  $n$  阶方阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ , 则  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ .

(2) 行列式的性质

设  $A, B$  为  $n$  阶方阵,  $k$  为常数, 则

①  $|A^T| = |A|$ .

②  $|kA| = k^n |A|$ .

③  $|AB| = |A| |B|$ .

注意:  $|A \pm B| \neq |A| \pm |B|$ .

### 考点三：可逆矩阵

#### 1、逆矩阵的定义

设  $A$  是一个  $n$  阶矩阵，若存在一个  $n$  阶矩阵  $B$ ，使得  $AB=BA=E$ ，则称  $A$  是可逆矩阵（或非奇异矩阵），并称矩阵  $B$  为  $A$  的逆矩阵，记为  $A^{-1}$ ，即  $A^{-1}=B$ 。若满足  $AB=BA=E$  式的矩阵  $B$  不存在，则称  $A$  为不可逆矩阵（或奇异矩阵）。

**注意：**（1）可逆矩阵与逆矩阵是同阶方阵。

（2）零矩阵不可逆。

（3）可逆矩阵的逆矩阵唯一。

## 2、逆矩阵的性质

设  $A, B$  为  $n$  阶的可逆矩阵，常数  $k \neq 0$ ，则

（1） $A^{-1}$  为可逆矩阵，且  $(A^{-1})^{-1}=A$ 。

（2） $AB$  为可逆矩阵，且  $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 。

（3） $kA$  为可逆矩阵，且  $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$ 。

（4） $A^T$  为可逆矩阵，且  $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$ 。

（5） $A^k$  为可逆矩阵，且  $(A^k)^{-1}=(A^{-1})^k$ 。

（6）可逆矩阵可从矩阵等式的同侧消去。即当  $P$  为可逆矩阵时，有  $PA=PB \Leftrightarrow A=B$ ;  $AP=BP \Leftrightarrow A=B$ 。

（7） $AB=O$ ，则  $B=O$ 。

**注意：** $(A \pm B)^{-1} \neq A^{-1} \pm B^{-1}$ 。

## 3、结论

（1） $n$  阶矩阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 。

（2） $n$  阶矩阵  $A$  可逆  $\Leftrightarrow A=P_1P_2 \dots P_s$  ( $P_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) 为初等矩阵)

## 4、逆矩阵的求法

（1）**伴随矩阵法**  $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$ 。

（2）**初等变换法**  $(A, E) \xrightarrow{\text{行}} (E, A^{-1})$ ,  $\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$ 。

## 考点四：分块矩阵

### 1、分块矩阵的定义

分块矩阵理论是矩阵理论中的重要组成部分。在理论研究和实际应用中，有时会遇到行数和列数较大的矩阵，为了表示方便和运算简洁，常对矩阵采用分块的方法，即用一些贯穿于矩阵的横线和纵线把矩阵分割成若干小块，每个小块称为矩阵的子块（子矩阵），以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

### 2、矩阵的运算

把子块作为元素，其运算同普通矩阵。

### 3、求逆

（1）当  $A$  和  $C$  是任意两个矩阵时，有  $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$ ，特别  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ 。

(2) 当 B 和 D 是任意两个矩阵时, 有  $\begin{pmatrix} O & B \\ D & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -D^{-1}CB^{-1} & D^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} C & B \\ D & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & D^{-1} \\ B^{-1} & -B^{-1}CD^{-1} \end{pmatrix}$ , 特别  $\begin{pmatrix} O & B \\ D & O \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} O & D^{-1} \\ B^{-1} & O \end{pmatrix}$ .

## 考点五：矩阵的初等变换与初等方阵

### 1、矩阵的初等变换

对一个矩阵施行以下三种类型的变换, 称为矩阵的初等变换。

- (1) 交换矩阵的某两行 (列)。
- (2) 用一个非零的数  $k$  乘矩阵的某一行 (列)。
- (3) 把矩阵中某一行 (列) 的  $k$  倍加到另一行 (列) 上。

### 2、矩阵的等价

若矩阵 A 经过若干次初等变换变为 B, 则称 A 与 B 等价。记为  $A \cong B$ 。

矩阵之间的等价关系有以下三条性质:

- (1) 反身性:  $A \cong A$ 。
- (2) 对称性: 若  $A \cong B$ , 则  $B \cong A$ 。
- (3) 传递性: 若  $A \cong B$ ,  $B \cong C$ , 则  $A \cong C$ 。

### 3、初等方阵

#### (1) 初等方阵的定义

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为初等方阵。

①交换 E 的第  $i$  两行 (列), 得到的初等方阵记为  $P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & 1 & & & 0 \end{pmatrix}$   $\begin{matrix} i \text{ 行} \\ j \text{ 行} \\ i \text{ 列} \end{matrix}$   $j \text{ 列}$

②用非零常数  $k$  乘 E 的第  $i$  行 (列), 得到的初等方阵记为  $D_i(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$   $i \text{ 行}$   $i \text{ 列}$

③将 E 的第  $i$  行的  $k$  倍加到第  $j$  行上 (或第  $j$  列的  $k$  倍加到第  $i$  列上) ( $i < j$ ), 得到的初等方阵记为

$$T_{ji}(k) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & k & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} i \text{ 行} \\ \\ j \text{ 行} \\ \\ i \text{ 列} \quad j \text{ 列} \end{matrix}$$

(2) 结论

$$|P_{ij}| = -1, |D_i(k)| = k, |T_{ji}(k)| = 1,$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, D_i(k)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{k}\right), T_{ji}(k)^{-1} = T_{ji}(-k).$$

(3) 定理

①  $P_{ij}$  左 (右) 乘 A 就是互换 A 的第  $i$  行 (列) 和第  $j$  行 (列) .

$D_i(k)$  左 (右) 乘 A 就是用非零数  $k$  乘 A 的第  $i$  行 (列) .

$T_{ji}(k)$  左乘 A 就是把 A 中第  $i$  行的  $k$  倍加到第  $j$  行上.

$T_{ji}(k)$  右乘 A 就是把 A 中第  $j$  列的  $k$  倍加到第  $i$  列上.

即: 左乘行变, 右乘列变.

②任一矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  都等价于某标准形  $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

③任一矩阵  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  都存在可逆矩阵  $P_m$  和  $Q_n$ , 使得  $P_m A Q_n = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

④  $n$  阶方阵 A 可逆  $\Leftrightarrow$  存在  $n$  阶可逆矩阵 P 和 Q, 使得  $PAQ = E \Leftrightarrow A$  可以写成若干个初等方阵的乘积.

## 考点六: 矩阵的秩

1、矩阵的秩的定义

设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 则 A 中非零子式的最高阶数称为 A 的秩, 记作  $r(A)$ .

2、性质

(1) 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 则  $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$ .

(2)  $r(A) = r(A^T)$

(3)  $n$  阶方阵 A 可逆  $\Leftrightarrow r(A) = n$ .

3、求解方法

将矩阵 A 化成阶梯形, 其非零行的个数即为 A 的秩.

## 考点七: 矩阵与线性方程组

1、非齐次线性方程组  $Ax = b$  有解  $\Leftrightarrow r(A, b) = r(A) = r$ .

当  $r = n$  时, 有唯一解;

当  $r < n$  时, 有无穷多解.

2、齐次线性方程组  $Ax = 0$  仅有零解  $\Leftrightarrow r(A) = n$ .

齐次线性方程组  $Ax = 0$  有非零解  $\Leftrightarrow r(A) < n$ .

注意：(1) 若齐次线性方程组  $Ax=0$  中方程的个数小于未知量的个数，则它必有非零解。

(2) 若齐次线性方程组  $Ax=0$  中方程的个数等于未知量的个数，则它有非零解的充要条件为  $|A|=0$ ，仅有零解的充要条件为  $|A| \neq 0$ 。

获取完整资料 请下载 APP 或关注公众号



扫码下载 app



扫码关注公众号